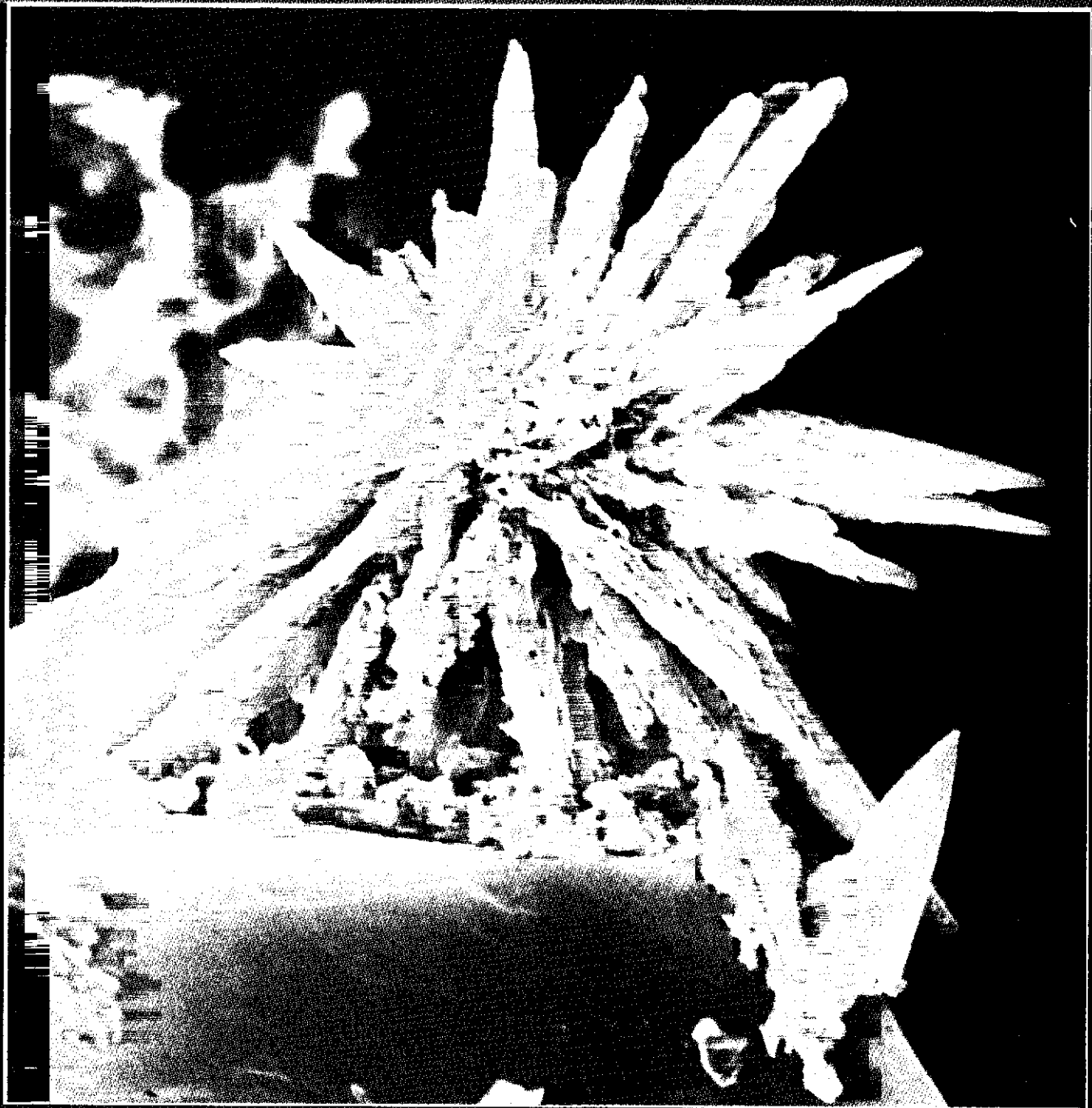


junge wissenschaft

Jugend forscht in Natur und Technik

Heft 26

young researcher • The European Journal of Science and Technology



Allzweckflügel für den Modellbau • Frische Luft im Klassenzimmer? • „Nährhafte“ Mathematik? Apfel – Birne – Ei • Seife stört das Kristallwachstum • Keine Idylle für Libellen • Automatisches Nullregelgetriebe im Kfz • Laubbaumblätter atmen auch im Herbst • Chick embryonal abnormalities due to the indirect effects of hypergravity

Apfel – Birne – Ei

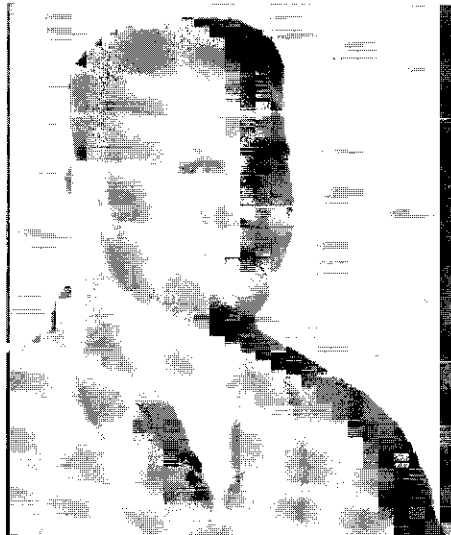
von Marcus Bäckmann

Von der Antike bis zum Computerzeitalter spannt sich ein weiter Bogen in der Berechnung von geometrischen Größen von Körpern. Erstaunlich ist jedoch, daß sich sogar umfangreiche Hand- und Lehrbücher der Schul- und Universitätsmathematik in der Berechnung elementarer Körper wie Kegel, Kugel, Paraboloid oder Ellipsoid erschöpfen. Eine Birne ist aber kein Kegel, ein Apfel keine Kugel und ein Ei kein Ellipsoid, und die Natur zeigt uns sogar noch wesentlich kompliziertere Formen auf.

Im Rahmen einer mathematischen Facharbeit zum Abitur habe ich versucht, die Realität an einigen biologischen, rotationssymmetrischen Körpern mit Hilfe des Grafik-Computers Amiga 2000 zu erfassen.

Gliederung

1. Einige Rückblicke
2. Infinitesimale Grundlagen
3. Computerunterstützung
4. Drei biologische Körper – drei Methoden
5. Ausblicke



Marcus Bäckmann, Jahrgang 1971, Hauptstraße 151 A, 8751 Heimbuchenthal

1. Einige Rückblicke

Im allgemeinen ist der römische Staatsmann, Redner und Geschichtsschreiber Marcus Tullius Cicero meist nur als Schöpfer und Verfasser von Senats- und Gerichtsreden und philosophischen Schriften bekannt. Daß er einen Beitrag zur Geschichte der Mathematik leistete, erscheint vielen als nebensächlich.

Mehr als 200 Jahre vor Ciceros Amtszeit lebte in Sizilien der wohl bedeutendste Mathematiker der Antike, Archimedes von Syrakus. Die wichtigsten Arbeiten von Archimedes betrafen Grundprobleme der Stereometrie, die der Ausarbeitung von Methoden zur Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten der klassischen Figuren und Körper Zylinder, Kegel, Kugel, Quader und Pyramiden dienten.

Er experimentierte dazu mit dem Hebelgesetz, um die Formel des Kugelvolumens zu erhalten, und er fand auf Grund von Annahmen, daß das Volumen eines Zylinders und der von ihm umschlossenen Kugel im Verhältnis 3 : 2 stehen. Diese Erkenntnis hatte bei Archimedes anscheinend besonders

große Begeisterung ausgelöst, denn er wünschte sich auf seinem Grab einen Zylinder und eine Kugel aufgestellt.

Syrakus wurde 212 v. Chr. nach zweijähriger Belagerung von den Römern eingenommen; bei der üblichen Plünderung der Stadt kam auch der greise Archimedes ums Leben. Als Cicero nun 75 v. Chr. als Quaestor auf Sizilien residierte, gelang es ihm, das damals bereits unbekannte und verfallene Grab des Archimedes anhand dieser Säule zu identifizieren und der Nachwelt zu beschreiben ([1], S. 33ff.).

Allerdings hatte schon die Mathematik der vorgriechischen Zeit Flächen- und Raumberechnungen gekannt, die fast immer aus Aufgaben der Landvermessung und der Bautechnik resultierten. Archimedes jedoch erweiterte diese Berechnung auf Drehkörper zweiter Ordnung, deren Begrenzungsflächen nun auch gekrümmt sein konnten. Spätere Mathematiker wie Pappos von Alexandria stellten im wesentlichen Sammelwerke zusammen, worunter besonders die Bemerkungen über die Extremwertbehandlung und der sogenannte Guldin'sche Schwerpunktsatz an Drehkörpern hervor-

zuheben sind. Die meisten dieser Schriften wurden zu Ansatzpunkten für die weiterführenden Methoden des 16. und 17. Jahrhunderts. Hier treten die Visierbücher mit Anleitungen für die Küfer zum Eichen von Fässern und zur Volumenberechnung auf. Vor allem auf die Anwendung (z. B. im Gelände oder zur Raumbestimmung von Fässern) kam es auch in den zahlreichen geometrischen Schriften dieser Zeit an (vgl. [1]).

Systematisiert wurde die Volumenberechnung von Johannes Kepler. Er griff dabei auf die aus der Antike stammenden Methoden vor allem des Archimedes zurück. Und dennoch ging Kepler methodisch weit über Archimedes hinaus, indem er den Begriff vom unendlich Kleinen in mathematische Rechenmethoden einbezog.

Infinitesimale Zerlegungsgedanken sprach Kepler für Kugel und Zylinder aus. Zum Beispiel schrieb er: *„Die Kugel besteht aus unendlich vielen Kegeln, deren Scheitel im Mittelpunkt zusammenreffen, und deren auf der Oberfläche gelegene Grundflächen durch Punkte ersetzt sind.“*

Aus Kugeln, Zylindern und Kegelstümpfen setzte Kepler komplizierte Körper näherungsweise zusammen, zum Beispiel das Faß aus Zylinder und zwei Kegelstümpfen. Insgesamt war Kepler so imstande, weit über Archimedes hinaus zu gehen, auch hinsichtlich der Anzahl der Körper, die – zumindest näherungsweise – dem Volumen nach berechenbar wurden. Kepler gab unter anderem auch Verfahren für *Torus, zitronenförmige, apfelförmige, birnen- und pflaumenförmige Körper, Quitte, Kürbis, Olive, Spindel* und andere mehr an. Keplers Vermählung war dann der Anlaß der berühmten *„Faßrechnung“* im Jahre 1615. Kepler selbst berichtete:

„Als ich im November des letzten Jahres (1613) meine Wiedervermählung feierte ... da war es die Pflicht des neugebackenen Gatten ..., für sein Haus den nötigen Haus-trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am vierten Tag der Verkäufer mit einer Meßbrute, mit der er alle Fässer ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung,

ihrem Weininhalt nach bestimmte. Die Vierrute wurde mit ihrer metallenen Spitze durch das oben befindliche Spundloch quer bis zu den Rändern der beiden Faßböden eingeführt, und als Längen gleich gefunden waren, ergab die Marke am Spundloch die Zahl der Eimer im Faß" ([2], S. 15).

Kepler bezweifelte zu Recht die Richtigkeit dieser Meßmethode. Er beschloß, die Rauminhaltsbestimmung = Stereometrie selbst zu behandeln. Er veröffentlichte deshalb zuerst 1615 einen Theorieband und anschließend 1616 einen Praxisband, bekannt unter dem Namen "Österreichisches Wein-Visier-Büchlein". Zwar läßt man Keplers Schlußweisen nur in Bezug auf ihren praktischen Wert gelten, trotzdem wurden diese über Cavalieri, Pascal, Fermat, Newton und besonders Leibniz wegberaubend für die moderne Integralrechnung. Denn mit dieser ist die stereometrische Erfassung rotations-symmetrischer und darüberhinaus auch beliebiger Körper (Abb. 1), sei es die Berechnung der Oberfläche oder des Volumens, jeder technischen wie praktischen Problematik gewachsen (vgl. [2]).

2. Infinitesimale Grundlagen

Die Infinitesimalrechnung bietet zur Volumenberechnung von Körpern die Integration und Differentiation von Funktionen als Hilfsmittel an. Insbesondere für Rotationskörper werden durch die Integration die Beschränkungen der einfachen Stereometrie aufgehoben. Unter Rotationskörpern sind dreidimensionale Gebilde zu verstehen, die durch Rotation eines oder mehrerer Kurvenzüge um eine Drehachse entstehen. Rotiert der Graph einer Funktion $f(x)$ um die X-Achse, so wird der Mantel eines Rotationskörpers überstrichen (vgl. [3], S. 279). Um das einbeschriebene Volumen des erzeugten Drehkörpers zu bestimmen, existieren zwei unterschiedliche Verfahren, die hier zunächst erläutert werden sollen. Ein Rotationskörper, der durch die Drehung des Flächenintegrals um die X-Achse entsteht, kann in einen "Stapel" von verschiedenen Kreisen, deren Mittelpunkte auf der X-Achse liegen, zerlegt werden. Der Radius jedes einzelnen Kreises entspricht dem Funktionswert $f(x)$ an der Stelle x . Somit ergibt sich für den Flächeninhalt einer kreisförmigen Schicht die Beziehung

$$A = r^2 \pi$$

und aus $r = f(x)$ folgt damit

$$A(x) = f(x)^2 \pi. \quad (1)$$

Das Volumen wird nun durch die Bildung des Integrals über die einzelnen Flächenelemente $A(x)$ von x_1 bis x_2 berechnet mit

$$V = \int_{x_1}^{x_2} (f(x)^2 \pi) dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2 dx \quad (2)$$

mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1 < x_2$ (vgl. [4], S. 239). Die rotierende Funktion muß im Drehintervall $[x_1, x_2]$ stetig integrierbar sein (Abb. 2).

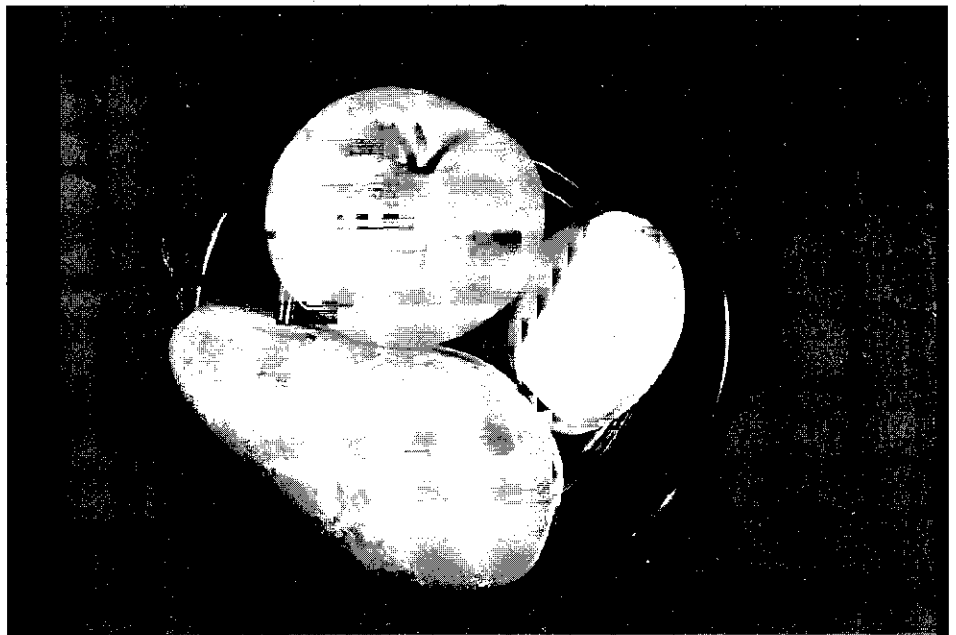


Abb. 1: Apfel - Birne - Ei

Eine zweite Methode, um den Rauminhalt eines Rotationskörpers zu bestimmen, resultiert aus der 1. Guldin'schen Regel. Diese besagt, daß das Volumen eines Rotationskörpers das Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Umfang des von dem Flächenschwerpunkts beschriebenen Kreises ist ([3], S. 281 und [5], S. 145) mit

$$V = 2 \pi S_y A \quad (3)$$

A Flächeninhalt der erzeugenden Fläche S_y Y-Koordinate des Flächenschwerpunktes.

Die Fläche A ergibt sich aus dem Integral über die Funktion $f(x)$ von x_1 bis x_2 . Die Schwerpunktskoordinaten eines homogenen Flächenstücks, das von der Kurve $y = f(x)$, der X-Achse und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt wird, sind

$$S_x = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx} \quad (4a)$$

$$S_y = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)^2 dx}{2 \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx} \quad (4b)$$

(vgl. [5], S. 346 und [3], S. 292). Zur Berechnung des Volumens wird allerdings nur die Koordinate S_y benötigt, die Formel zur Berechnung von S_x sei nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Ein Nachteil dieser Berechnungsmethode soll nicht verschwiegen werden, denn bei der Volumenberechnung mit (2) wird nur einmal eine Integration durchgeführt, bei der Schwerpunktbestimmung muß jedoch zweimal integriert werden, was die Berechnung häufig unnötig ver-

kompliziert. Der Vorteil von (3) kommt dann zum Tragen, wenn der Schwerpunkt bereits bekannt ist, weil dann zwei gleichwertige Alternativen bestehen, die jeweils verschiedene Vorteile haben. So wäre, immer vorausgesetzt, daß der Schwerpunkt bekannt ist, bei einer Funktion mit quadratischen Wurzelgliedern wegen der Elimination der Wurzel durch das Quadrat Formel (2) zu bevorzugen. Bei Polynomen oder bei trigonometrischen Funktionen ist Methode (3) besser, da hier der höchste Grad nicht noch einmal erhöht wird.

Nicht nur die explizite Funktionsform $y = f(x)$ kann um die X-Achse gedreht werden, dies geht auch bei einer weiteren Art, der Parameterform einer Funktion. Doch bevor man die Parameterform verwendet, soll erst erklärt werden, wie diese aufgebaut ist.

Häufig ist die Darstellungsweise von Funktionen und vor allem von Kurven in Form von Ausdrücken der Art $y = f(x)$ nicht mehr ausreichend. Bei der expliziten Form der Funktionsgleichung wird jedem Wert x höchstens ein Wert $y = f(x)$ zugeordnet.

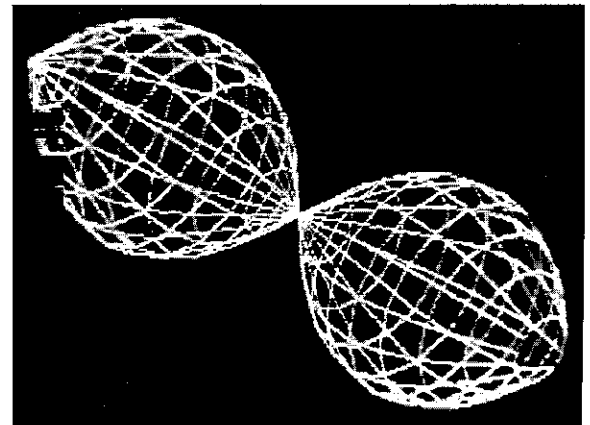


Abb. 2: Der Rotationskörper der Funktion $f(x) = \sin x$ für $x \in [0; 2\pi]$

Tritt der Fall auf, daß einem x -Wert zwei oder mehr y -Werte zugeordnet werden, läßt sich dieser Graph nicht mehr in expliziter Form darstellen. Aus diesem Grund ist für viele Anwendungsfälle die Darstellung der Funktion in Parameterform vorteilhaft bis notwendig ([6], Kapitel 2).

Ist bei einer Funktion $y = f(x)$ sowohl x als auch y wieder eine Funktion eines gemeinsamen Parameters t , dann ist

$$x = \Phi(t) = x(t)$$

$$y = \delta(t) = y(t)$$

eine Parameterdarstellung der Funktion $y = f(x)$ (vgl. [7], S. 280).

Die Parameterform kann erzeugt werden, indem man $x = x(t)$ beliebig wählt und $y = y(t)$ durch das Ersetzen von $x = x(t)$ in $y = f(x)$ bestimmt. Die Wahl von $x = x(t)$ sollte zweckmäßigerweise so sein, daß die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ einfache und vor allem eindeutige Funktionen von t sind (vgl. [8], S. 118f).

Eine Einschränkung muß gemacht werden: zu jeder expliziten Form gibt es viele verschiedene Parameterdarstellungen, aber nicht jede Parameterdarstellung ergibt zwangsläufig eine explizite Form, da oft ein Umstellen nach t nicht möglich ist.

Da die Parameterdarstellung einer Funktion aus der expliziten Form hervorgeht, läßt sich die Funktion auch in dieser Form um die X -Achse rotieren. Voraussetzung ist aber, daß die Rotationsfunktion im Rotationsintervall $[t_1; t_2]$ nur im positiven Bereich des Koordinatensystems liegt, daß also gilt $x(t) \geq 0$ mit $t \in [t_1; t_2]$. Die Volumenformel ergibt sich nun durch Umformung von (2).

Bei der Integration bestimmter Integrale gilt die 2. Substitutionsregel

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx \quad (5)$$

([9], S. 493 und [10], S. 465),

in diese wird die Parameterform einer Funktion eingesetzt

$$x(t) = \Phi(t)$$

$$y(t) = f(x(t)) = f(\Phi(t))$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)^2 dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\Phi(t))^2 \Phi'(t) dt$$

$$x_1 = x(t_1) = \Phi(t_1)$$

$$x_2 = x(t_2) = \Phi(t_2)$$

daraus ergibt sich die Volumenformel für Funktionen in Parameterform durch das Zurückeinsetzen

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt. \quad (6)$$

3. Computerunterstützung

Seit der Erfindung der ersten integrierten Schaltungen hat sich die Mikrocomputertechnik überall durchgesetzt. In einem großen Teil der Haushalte stehen sogenannte Heimcomputer, kaum ein Büro kommt heute noch ohne einen Personalcomputer aus.

Nicht nur die Anzahl der Geräte hat sich lawinenartig erhöht, auch die Ausstattung der Computer wurde, vor allem was Geschwindigkeit und Speicherkapazität betrifft, um ein Vielfaches verbessert. Im Jahr 1969 hatte der Bordcomputer der Mondlandefähre "Eagle" einen Speicher von 4 KByte, was 4096 Zeichen entspricht. Ein mittlerer Heimcomputer hat heute etwa 1024 KByte, was eine Speicherkapazität von stattlichen 1.048.576 Zeichen bedeutet. Geradezu prädestiniert sind diese Geräte für mathematische Anwendungen – letztendlich ist auch der Computer ein Kind der Mathematik, die Digitaltechnik basiert auf der Bool'schen Algebra, einem Teilgebiet der Mathematik. Daher bietet es sich an, den Computer Tätigkeiten verrichten zu lassen, die er genauer und schneller erledigt als der Mensch, zum Beispiel das Skizzieren von Funktionen oder das Zeichnen von Körpern. Wird heute ein Funktionsgraph mühselig mit Hand Punkt für Punkt gezeichnet, so scheint es sich im Zeitalter der Mikrocomputer dabei um einen Anachronismus zu handeln. Daher soll unser Computer die Bilder zeichnen, wir verschwenden unsere Zeit nicht mehr damit, die Probleme darzustellen, sondern verwenden sie für etwas, das wir besser können: für das Lösen der Probleme. Alle Computerprogramme, die hier verwendet wurden, sind auf einem Commodore Amiga in der Sprache Modula2 entwickelt worden, als Compiler wurde das M2Amiga-Entwicklungssystem Version 3.3d von A+L eingesetzt. Im Gegensatz zu den meisten Programmiersprachen ist Modula2 noch sehr neu. Sie wurde 1980 von Niklaus Wirth, der bereits 1970 die Sprache Pascal entwickelte, als Verbesserung der Sprachen Pascal und Modula vorgestellt.

Da die Zeichnung eines Funktionsgraphen am Bildschirm nichts grundlegend Neues ist, soll das Vorgehen nur grob erläutert werden. Zuerst wird der Wertebereich und der Definitionsbereich der Funktion untersucht. Danach wird ein Skalierungsfaktor berechnet, um den Graphen der Funktion in das vorgegebene Fenster einzupassen. Jetzt werden die Achsen des Koordinatensystems gezeichnet, schließlich der Graph der Funktion.

Bei der Drehung um die X -Achse handelt es sich um das Kernstück der Computerdarstellung von Rotationsfunktionen. Noch einmal zur Erinnerung: eine Rotationsfunktion ist eine Funktion, deren Graph um die X -Achse rotiert, so daß ein dreidimensionaler Körper entsteht. Diese Operation läßt sich zwar sehr leicht gedanklich ausführen, doch wie wird sie mathematisch beschrieben, daß ein Computer etwas damit anfangen kann (Abb. 3)?

Man zerlegt einen Rotationskörper, ähnlich wie bei der Volumenberechnung, in Schichten. Eine solche Schicht hat, wenn man sie von oben betrachtet und der Mittelpunkt auf der X -Achse liegt, eine Kreisform. Der Radius des Kreises wird durch den Funk-

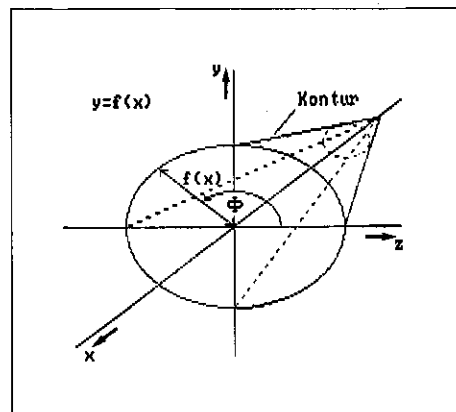


Abb. 3: Ein kreisförmiger Schnitt durch einen Rotationskörper

tionswert $f(x)$ an der Stelle x bestimmt. Die Parameterdarstellung der Kreisfunktion lautet

$$x(t) = r \cdot \cos t \quad (7a)$$

$$y(t) = r \cdot \sin t \quad (7b)$$

mit r = Radius des Kreises.

Man erkennt, daß sich eine Schicht des Rotationskörpers durch diese Funktion beschreiben läßt, denn die Z -Achse entspricht der X -Achse der zweidimensionalen Darstellung, und die Y -Achse bleibt die Y -Achse. Somit läßt sich ein Punkt $P(X;Y;Z)$, der auf der Oberfläche des Rotationskörpers liegt, berechnen mit

$$X_p = x \quad (8a)$$

$$Y_p = f(x) \cdot \sin \Phi \quad (8b)$$

$$Z_p = f(x) \cdot \cos \Phi. \quad (8c)$$

Für einen Rotationskörper, der durch Drehung einer Funktion in Parameterform entstand, müssen die Formeln etwas abgeändert werden, da nun auch x eine veränderliche Größe ist. Es ergibt sich

$$X_p = x(t) \quad (9a)$$

$$Y_p = y(t) \cdot \sin \Phi \quad (9b)$$

$$Z_p = y(t) \cdot \cos \Phi. \quad (9c)$$

Bei (8) und (9) ist Φ der Winkel zwischen der Z -Achse und der Gerade zwischen Kurvenpunkt und Drehmittelpunkt.

Die Funktion ist nun gedreht (Abb. 4), die Punkte der Oberfläche liegen nun alle in der Form $(X;Y;Z)$ vor. Doch bis jetzt ist noch keine Linie des Körpers am Bildschirm erschienen, die dreidimensionalen Koordinaten müssen erst in zweidimensionale transformiert werden, damit sie gezeichnet werden können.

Bei der Darstellung von Körpern auf einer Ebene gibt es verschiedene Projektionsmöglichkeiten, zum einen die Gruppe der Parallelprojektionen, und die Gruppe der Fluchtpunktprojektionen. Für eine Darstellung eines Körpers, bei dem mathematische und nichtkünstlerische Aspekte im Vordergrund stehen, kommt nur eine Parallelprojektion in Frage, weil in dieser Darstellung alle Parallelen erhalten bleiben.

Bei der Kavalierverspektive bleiben alle X - und Y -Werte längentreu erhalten, die Z -Achse wird in einem Winkel von 45° gegen die Bildebene gedreht und um die Hälfte gekürzt.

```

Drehe Funktion f(x)
xsw := (Xmax-Xmin)/Kantenpunkte
phisw:=360/Schritte
phi :=0
für k:=1 erhöhe um 1 bis KantenAnzahl
  x:=Xmin
  für kp:=1 erhöhe um 1 bis KantenPunkte
    xa [k, kp] :=x
    ya [k, kp] :=f(x)*sin(phi)
    za [k, kp] :=f(x)*cos(phi)
    x :=x+xsw
  phi:=phi+phisw

```

Abb. 4: Nassy-Schneidermann Struktogramm zur Drehung einer Funktion f(x) um die X-Achse

Eine dazu sehr ähnliche Darstellung ist die isometrische Projektion. Bei ihr haben die Achsen das Verhältnis 1 : 1 : 1, die Achsen stehen in der Bildebene in einem Winkel von 120° aufeinander. Die Projektionsgleichungen für diese Darstellung lauten

$$x' = x \cdot \cos 30^\circ - z \cdot \cos 30^\circ \quad (10a)$$

$$y' = y - x \cdot \cos 60^\circ - z \cdot \cos 60^\circ \quad (10b)$$

(Vgl. [11], S. 30f und S. 35f).

Diese Umformung erledigt das Unterprogramm *Mache3Dzu2D* in den beiden Programmen. Danach werden die Koordinaten skaliert, damit der Körper am Bildschirm immer mittig gezeichnet wird. Der Körper wird nun gezeichnet, indem die einzelnen Punkte, die jetzt in der Form (X;Y) vorliegen, in bestimmter Reihenfolge miteinander verbunden werden. Dies erledigt das Unterprogramm *ZeichneRotKoerper* bei beiden Programmen. Als erstes werden die Kanten gezeichnet, also die Funktionskurve zu jedem Drehwinkel. Danach werden die Kantenpunkte um den Körper herum miteinander verbunden, es werden sozusagen die Umfänge der Schnittkreise gezeichnet.

Betrachtet man die Drahtgitterdarstellung am Bildschirm, so fallen noch einige kleinere Mängel auf: die Linien, die im Bildhintergrund liegen, sind sichtbar, obwohl dies nicht der Realität entspricht. Auch ist das Bild statisch, es wäre denkbar, daß der Körper auf Tastendruck um die verschiedenen Achsen gedreht wird oder dergleichen. Zudem könnte das Bild noch an Plastizität gewinnen, indem es als Vollflächenmodell dargestellt wird. Eine Methode dazu wäre, die ganze Oberfläche in Dreiecke zu zerlegen. Die Dreiecke werden nun nach ihrem Abstand zum Betrachter sortiert und von hinten nach vorne gezeichnet. Die Farbe der Dreiecke wird durch die Neigung der Dreiecksfläche gegen eine Lichtquelle im Raum bestimmt. Ist die Fläche der Lichtquelle zugewandt, so ist sie heller, ist sie abgewandt, so ist sie dunkler. Das Ergebnis ist ein Vollflächenmodell, das sogar Körperschatten aufweisen würde (dazu: [12], [13]). Doch würde diese sehr genaue, aber auch aufwendige Darstellung den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen, sie ist nur

erwähnt, um aufzuzeigen, welche programmtechnischen Erweiterungsmöglichkeiten existieren. Nach dieser theoretischen Vorarbeit zu den Rotationsfunktionen sollen nun einige praktische Anwendungen zur Volumenberechnung erläutert werden. Anhand dreier grundlegend unterschiedlicher biologischer Körper, einer Birne, einem Ei und einem Apfel, soll die praktische Seite der Volumenberechnung von Rotationskörpern dargestellt

werden. Hierbei wird die mathematische Fiktion vorausgesetzt, daß bei diesen Körpern näherungsweise die Rotationssymmetrie vorhanden ist – was im allgemeinen durch die Einführung eines Querschnitts durch die Körper leicht bewiesen werden kann.

4. Drei biologische Körper – drei Methoden

“Drei Körper – drei Methoden” heißt die Überschrift zu diesem Kapitel, denn die drei Körper werden auf verschiedene Art und Weise durch Funktionen angenähert. Zum einen wird die Kontur durch abschnittsweise Definition von Funktionen, zum anderen durch Umwandlung von Funktionen in andere Darstellungsweisen, und schließlich durch Verzerrung bestehender Funktionen mathematisch beschrieben.

Birne [lat.] *Pirus*, Gattung der Rosengewächse, rund 25 Arten, die Kulturbirne wurde unter anderem aus der dornigen Wildbirne (Misch- und Auwälder) gezüchtet (aus [14], S. 430).

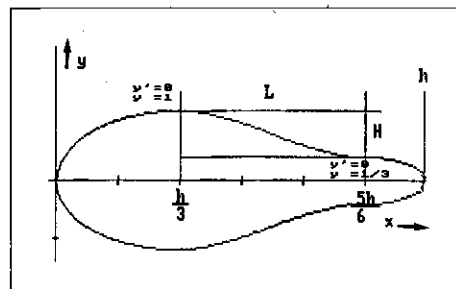


Abb. 6: Das Profil einer Birne als abschnittsweise definierte Funktion

Betrachtet man den Längsschnitt durch eine Birne (Abb. 5), so läßt sich die Konturlinie in drei Abschnitte einteilen. Der erste und der dritte Abschnitt können durch Teile einer Ellipse, die durch einen glatten Kurvenzug verbunden sind, beschrieben werden.

Für den ersten Abschnitt mit $x \in [0; h/3]$ ist der Radius in Y-Richtung $r = 1$. Dies ist eine Festlegung, durch die die Streckung des Graphen in Y-Richtung vereinfacht wird. Der Radius in X-Richtung wird $R = h/3$.

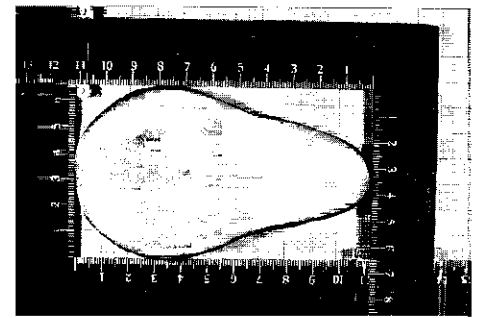


Abb. 5: Ein Schnitt durch eine handelsübliche Birne

Zudem liegt der Mittelpunkt der Ellipse auf der Y-Achse, die Funktion muß noch um R nach rechts verschoben werden. Es gilt somit für den positiven Kurvenzug

$$f(x) = \frac{3}{h} \sqrt{(h/3)^2 - (x - h/3)^2} = \frac{1}{h} \sqrt{-9x^2 + 6hx} \quad (11)$$

Der zweite Abschnitt wird durch ein Polynom angenähert. Der Graph eines Polynoms zwischen den Punkten (0;H) und (L;0) (Abb. 6) muß folgende Nebenbedingungen erfüllen, damit die Kurve an den Nahtstellen einen glatten Übergang aufweist

- (I) $f(0) = H$; (II) $f'(0) = 0$
- (III) $f(L) = 0$; (IV) $f'(L) = 0$.

Das sind insgesamt 4 Bedingungen, die den Polynom-Ansatz

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d \quad (12)$$

ergeben. Es wird nun noch die erste Ableitung der rationalen Funktion gebildet,

$$y' = 3a x^2 + 2b x + c$$

danach wird das lineare Gleichungssystem erstellt

- (I) $a 0^3 + b 0^2 + c 0 + d = H$
- (II) $3a 0^2 + 2b 0 + c = 0$
- (III) $a L^3 + b L^2 + c L + d = 0$
- (IV) $3a L^2 + 2b L + c = 0$.

Die Lösungen

$$a = 2 \frac{H}{L^3}, \quad b = -3 \frac{H}{L^2}, \quad c = 0, \quad d = H$$

werden in (12) eingesetzt und ergeben

$$y = 2 \frac{H}{L^3} x^3 - 3 \frac{H}{L^2} x^2 + H \quad (13)$$

(vgl. hierzu [15], S. 68f)

Das Teilstück muß nun noch an die geforderten Maße angepaßt werden. Es ist ersichtlich, daß

$$L = \frac{1}{2} h, \quad H = \frac{2}{3} \text{ wird,}$$

zudem muß der Ast um $1/3$ angehoben und um $h/3$ nach rechts verschoben werden. Dies in (13) eingesetzt ergibt für das Polynomzwischenstück

$$y = \frac{32}{3h^3} x^3 - \frac{56}{3h^2} x^2 + \frac{80}{9h} x - \frac{23}{81} \quad (14)$$

Der dritte Abschnitt für $x \in [5h/6; h]$ wird wieder durch eine Vierteilellipse angenähert. Hier gilt, daß der Radius in X-Richtung $R = h/6$ und der Radius in Y-Richtung $r = 1/3$ ist. Die normale Ellipse in Nullage muß noch um $5h/6$ nach rechts verschoben

werden. Daraus folgt für den positiven Zweig

$$y = \frac{6}{3h} \sqrt{h^2 - 36 \cdot (x - 5h/6)^2}$$

$$= \frac{2}{3h} \sqrt{-9x^2 + 15xh - 6h^2} \quad (15)$$

Die Funktionsabschnitte wurden so normiert, daß der größte Wert der Funktion 1 ist. Eine Streckung in Y-Richtung wird durch eine Multiplikation mit dem halben Durchmesser erreicht. Werden die Ergebnisse (11), (14) und (15) zusammengefaßt, so ist das Ergebnis eine abschnittsweise Definition einer Funktion $f(x)$, die der Oberflächenkontur einer Birne angenähert ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{d}{2h} \sqrt{-9x^2 + 6hx} & ; 0 \leq x \leq \frac{h}{3} \\ \frac{d}{2} \left(\frac{32}{3h^3} x^3 - \frac{56}{3h^2} x^2 + \frac{80}{9h} x - \frac{23}{81} \right) & ; \frac{h}{3} \leq x \leq \frac{5}{6} h \\ \frac{d}{3h} \sqrt{-9x^2 + 15xh - 6h^2} & ; \frac{5}{6} h \leq x \leq h \end{cases} \quad (16)$$

Das Volumen des Rotationskörpers wird nun berechnet, indem die Integralformel (2) auf die einzelnen Abschnitte angewandt wird.

$$V = \pi \int_0^h f(x)^2 dx$$

$$= \pi (J_1 + J_2 + J_3) \quad (J_n = \text{Teilintegral})$$

$$J_1 = \int_0^{h/3} \left(\frac{d}{2h} \sqrt{-9x^2 + 6hx} \right)^2 dx$$

$$J_2 = \int_{h/3}^{5h/6} \left(\frac{d}{2} \left(\frac{32}{3h^3} x^3 - \frac{56}{3h^2} x^2 + \frac{80}{9h} x - \frac{23}{81} \right) \right)^2 dx$$

$$J_3 = \int_{5h/6}^h \left(\frac{d}{3h} \sqrt{-9x^2 + 15xh - 6h^2} \right)^2 dx$$

$$V = \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{16} + \frac{1}{324} \right) \pi d^2 h$$

$$V_{\text{Birne}} = \frac{157}{1296} \pi d^2 h. \quad (17)$$

Das Volumen einer Birne kann demnach unter Beachtung der Voraussetzungen durch eine einfache Formel berechnet werden.

Lexikalisch ist das Ei (lat. Ovus) die biologische Fortpflanzungszelle von Mensch, Tier und Pflanze. Das tierische Ei besteht aus Eikern, Eiplasma (mit Dotter) und fester Eihülle. Die Formenmannigfaltigkeit der Vogeleier hat zu einem bes. Wissenschaftszweig, der Oologie (Eierkunde), die vor allem für die Systematik von Bedeutung ist, geführt (aus [16], S. 913).

In der Geometrie und der Mechanik gibt es verschiedene Näherungskonstruktionen mittels Kreisbögen für Eiprofile. Ein Eiprofil läßt sich aber auch durch ein Parabelsegment an einem Kreis darstellen ([17], Abb. 70). Dies ist wieder eine abschnittsweise Definition. Die Mathematik bietet zu diesen Methoden, wie so oft, Alternativen an. Eine solche Alternative wird hier gewählt, das Ei soll nämlich durch Anpassung einer bestehenden algebraischen, geschlossenen Funk-

tion beschrieben werden. Untersucht man die Relation

$$f(x) = \pm \sqrt{x^3 - x},$$

so stellt man fest, daß die Relation im Bereich der Nullstellen $N_1 (-1;0)$ und $N_2 (0;0)$ ungefähr ein Eiprofil aufweist. Leider hat diese Relation auch die unangenehme Eigenschaft, daß sie in den Bereichen $[-\infty; -1]$ und $[0;1]$ nicht definiert ist. Außerdem paßt der Ast im Bereich $[1; +\infty]$ nicht recht zu der landläufigen Vorstellung von der Figur eines Eies. Will man das Intervall, in dem der Graph der Relation einem Ei gleicht, vom Rest der Relation isoliert erhalten, so bietet sich die schon angesprochene Transformation des eiförmigen Teiles der Relation in Parameterdarstellung an.

Zur Umwandlung in die Parameterform wird zuerst x in Abhängigkeit von t gesetzt. Für ein Eiprofil, das für $t \in [0; \pi]$ genau den halben Umfang umläuft, darf x nur im Intervall $[-1;0]$ liegen (der Parameter t darf übrigens keinesfalls als Winkel zwischen einer Koordinatenachse und dem Funktionsstrahl interpretiert werden). Eine Funktion, die diese Bedingung erfüllt, ist eine in X-Richtung gestreckte und gekippte Sinusfunktion. Für x gilt also

$$x(t) = -\sin 0,5t. \quad (18)$$

Wird dies nun in die Funktion $f(x)$ eingesetzt, so erhält man y in Abhängigkeit von t mit

$$y(t) = \sqrt{-\sin^3 0,5t + \sin 0,5t} \quad (19)$$

Die Richtigkeit dieser Überlegung beweist der Graph der Parameterform der Funktion.

Es ergibt sich vorteilhafterweise eine elegante Darstellung eines Eiprofiles, das ähnlich Kreis und Ellipse in einfacher Parameterdarstellung darstellbar und berechenbar ist.

Eine Streckung in X-Richtung ergibt sich durch Multiplikation mit einem Parameter r_x , eine Streckung in Y-Richtung durch Multiplikation mit einem Parameter r_y . Der Graph der Funktion läßt sich also wesentlich einfacher als bei einer expliziten Darstellung in Höhe und Breite verändern.

Werden nun die beiden Parameter auf 1 normiert, so entsteht quasi ein Einheitsei mit einer Konturformel, in die direkt Längenangaben in cm einfließen können. Es ergibt sich für

$$r_x = h. \quad (20)$$

Außerdem ergibt sich der Zusammenhang

$$r_y = \frac{\sqrt[4]{27}}{2\sqrt{2}} d. \quad (21)$$

Wird nun das Volumen des Rotationskörpers dieser Funktion in Parameterform bestimmt, so ist das Volumen eingesetzt in (6)

$$V_{\text{Ei}} = \frac{\pi}{4} r_y^2 r_x. \quad (22)$$

Werden nun die Normierungsformeln (20) und (21) angewandt, ergibt sich eine einfache endgültige Volumenformel

$$V_{\text{Ei}} = \frac{3\sqrt{3}}{32} \pi d^2 h. \quad (23)$$

Bei dieser Volumenformel (Abb. 7) wurden in einer Meßreihe die Abweichungen der erwarteten Volumen vom gemessenen Volumen bestimmt. Zuerst wurden Höhe und Durchmesser der Eier, danach das Volumen mit Hilfe der Wasserverdrängung bestimmt. Die Abweichungen sind mit einem mittleren prozentualen Fehler von 1,5 % relativ klein, eine Annäherung des Eies durch ein Ellipsoid, die ebenfalls gerechnet wurde, ergab einen mittleren prozentualen Fehler von 3,1 %. Bei der Annäherung durch ein Ellipsoid war zudem die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Fehler mit 5,1 % doppelt so groß wie bei der Annäherung mit Formel (23). Es wird daher deutlich, daß eine an sich naheliegende Annäherung durch ein Ellipsoid zu grob ist. Darüberhinaus könnte die hier vorgeschlagene Eiformel durch Einführung der Achsenlage des Durchmessers im Verhältnis zur Eihöhe zu einer weiteren Verbesserung führen. Auf diese Berechnung muß hier aus Platzgründen leider verzichtet werden.

Apfel [lat.] Malus, Kernobst, Familie Rosengewächse; aus wilden Arten (z. B. Malus silvestris, einheimisch, bereits von Pfahlbauern verwendet) wurde unser Apfel in unzähligen Edelsorten gezüchtet (aus [14], S. 183).

Die sich ergebende Bahnkurve eines Punktes P, wenn ein Kreis k mit dem Radius r auf der Außenseite eines festen Kreises K mit dem Radius R abrollt, heißt gemeine Epizykloide. Beträgt das Verhältnis von $R : r = 2$, so entsteht eine Kardioide ([10], S. 465f). Der Längsschnitt durch einen Apfel (Abb. 8) ähnelt sehr stark dem Funktionsgraphen der Kardioide. Es ist daher zu vermuten, daß sich die Konturkurve des Apfels durch eine Kardioide annähern läßt.

Die Parameterform der Kardioide mit

$$x(t) = 2 \cos t - \cos 2t \quad (24)$$

$$y(t) = 2 \sin t - \sin 2t$$

muß zuerst wieder auf 1 normiert werden. Das Volumen eines "Kardioids" mit den Radien $r_x = 1$ und $r_y = 1$ wird in vielen Büchern als Beispiel berechnet. Aus dem Ergebnis folgt die allgemeine Volumenformel

$$V_{\text{Kardioid}} = \frac{64}{3} \pi r_y^2 r_x. \quad (25)$$

durch Normieren der Parameterform (24) entsteht dann die normierte Form der Volumenformel eines kardioidischen Apfels mit

$$V_{\text{Apfel}} = \frac{128}{729} \pi d^2 h. \quad (26)$$

Ruft man sich aber einen Apfelquerschnitt in Erinnerung, sieht man, daß der Apfel auch an der Unterseite einen, wenn auch kleineren, Nabel, bedingt durch den Blütenansatz, aufweist. Die Näherung (24) ist darum offenbar noch verbesserungsbedürftig, wenn der Funktionsgraph einen zweiten Einschnitt aufweist. Aus dem Bildungsgesetz der Epizykloiden läßt sich die Parameterdarstellung einer solchen Kurve mit

$$x(t) = 3 \cos t - \cos 3t \quad (27)$$

$$y(t) = 3 \sin t - \sin 3t = 4 \sin^3 t$$

herleiten.

Der Graph dieser Funktion ist aber immer noch zu symmetrisch, denn bei einem Apfel ist der untere Einschnitt kleiner als der obere, außerdem liegt die dickste Stelle des Apfels auch nicht in der Mitte des Apfels. Die Funktion (27), die zu der Geraden $x = 0$ symmetrisch ist, kann durch Multiplikation mit einem Linearfaktor, der mit kleinerem x größer wird, wie gewünscht verzerrt werden. Da die Funktion gegen den Uhrzeigersinn läuft, wird ein kleineres x durch ein größeres t bedingt. Folglich wird die Verzerrung durch eine Multiplikation mit dem Laufparameter t erreicht.

Die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= t (3 \cos t - \cos 3t) \\ y(t) &= t (3 \sin t - \sin 3t) \end{aligned} \quad (28)$$

ist die neue Parameterform (Abb. 9). Die



Abb. 8: Ein axial aufgeschnittener Apfel

Darstellung sieht schon viel besser aus, doch hat die Formel (28) einen großen Haken: durch die Quadrierung von $y(t)$ und der Multiplikation mit der Ableitung von $x(t)$ entsteht ein Term mit Gliedern der Form $t \cdot \sin^m x \cdot \cos^n x$ mit $m, n > 5$, der sich analytisch nicht mehr integrieren läßt.

Eine Integration mit Hilfe von Näherungslösungen, zum Beispiel mit Polynomen höherer Ordnung, erwies sich in der praktischen Anwendung als zu ungenau. Daher entstand als Kompromiß das Ausweichen auf die numerische Integration nach Gauß (vgl.: [18], S. 86ff).

d gemessen (in cm)	7,9	7,2	7,8	9,0
h gemessen (in cm)	6,1	5,9	6,6	8,9
V_{exp} (in cm^3)	200	160	220	400
V_{Apfel} (26) (in cm^3)	210,0	168,7	221,5	397,7
Abweichung (in %)	5,0	5,4	0,7	0,6
V_{Apfel} (30) (in cm^3)	224,3	180,2	236,5	424,6
Abweichung (in %)	7,2	12,6	7,5	6,2

Abb. 10: Die Tabelle der Meßwerte von Äpfeln

Wie man bereits sehen konnte, lassen sich bei der Volumenberechnung jedesmal die Radien in X- und Y-Richtung herausziehen, so daß nur noch ein Term mit einem Parameter integriert werden muß. Diese numerische Integration wird nun mit dem Programm Integration durchgeführt. Das Ergebnis der Rechnung ist

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi y^2(t) x'(t) dt \\ &= 317,7 \pi r_y^2 r_x \end{aligned} \quad (29)$$

Werden die Formeln zusammengefaßt, ist das Resultat die normierte Volumenformel $V_{\text{Apfel 2}} \approx 0,1875 \pi d^2 h$

$$= \frac{3}{16} \pi d^2 h \quad (30)$$

Auch an Äpfeln wurden Volumenmessungen zur Überprüfung der Formeln durchgeführt, was besonders interessant ist, da hier zwei verschiedene Lösungen miteinander konkurrieren (Abb. 10).

Überraschenderweise ist die Volumenberechnung mit (30) ungenauer als mit (26), da hier der mittlere prozentuale Fehler kleiner ist. Jedoch ist bei (30) die geometrische Ähnlichkeit mit einem Apfellaängsschnitt wesentlich größer, so daß im praktischen Gebrauch durch Ansatz eines Korrekturgliedes durch Hinzunahme der unterschiedlichen Tiefen der Nabelpunkte eine wesentliche Verbesserung erreicht werden könnte (Abb. 11). Dies würde jedoch zuerst eine umfangreiche Meßreihe verschiedener Apfelsorten voraussetzen, sowie eine Anpassung der Meßwerte an die Parameterformen durch die sogenannte Regressionsrechnung. Auch bei der Birne und dem Ei wäre hiermit eine Verbesserung möglich, doch da kein Ei dem anderen gleicht – hier hat der Volksmund unrecht – muß wie immer ein Kompromiß zwischen Ergebnis und Aufwand fürs erste genügen.

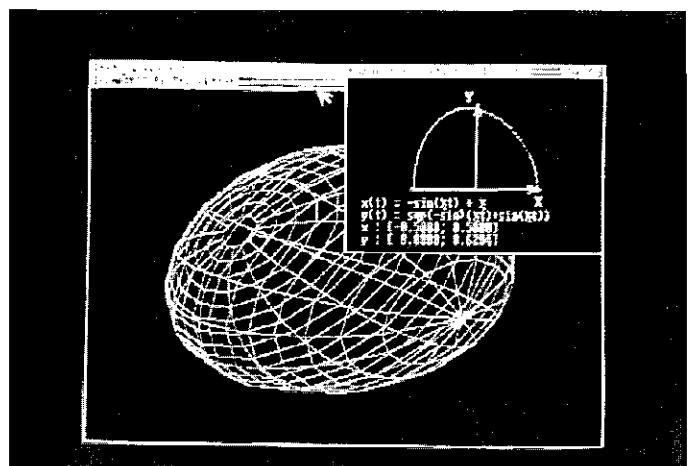


Abb. 7: Das Ei als Rotationskörper

5. Ausblicke

Von der Antike bis zum Computerzeitalter spannt sich ein weiter Bogen in der Entwicklung stereometrischer Berechnungen, insbesondere der Volumenberechnung. Dabei ist die Infinitesimalrechnung ein wichtiges Hilfsmittel geworden. Der Vollständig-

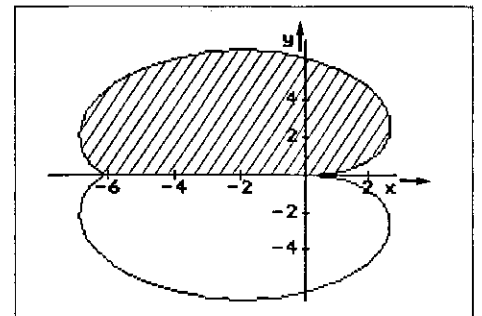


Abb. 9: Der Funktionsgraph von (28) im Bereich $[0; \pi]$, der negative Ast entstand durch Spiegelung an der X-Achse

keit halber sei erwähnt, daß sich Volumina auch in Polarkoordinaten, mit Gebietsintegralen, Raumintegralen und allgemeinen Volumenintegralen berechnen lassen. Grundsätzlich bleibt jedoch immer die Bestimmung der dem Körper zugrundeliegenden Funktion in einer oder mehreren Ebenen im Vordergrund stehen. Wenn nicht als

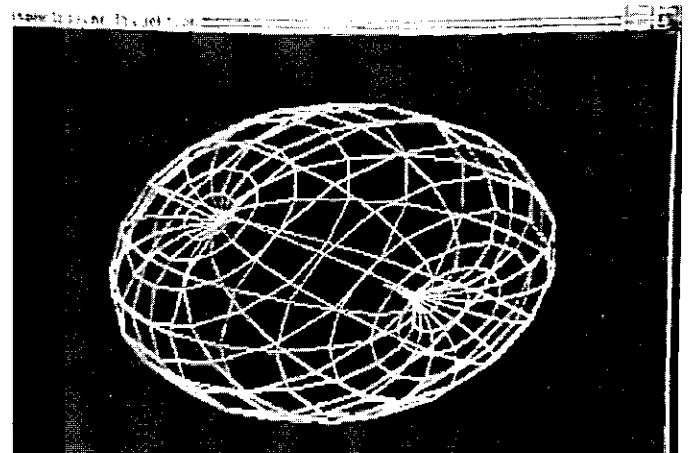


Abb. 11: Die asymmetrische und verbesserte Form des Apfels

klares geometrisches Gesetz, dann zumindest als Annahme und Arbeitshypothese. Hierzu ist zu erwähnen, daß sogar umfangreiche Hand- und Lehrbücher der Mathematik sich in der Berechnung elementarer Körper erschöpfen, allerhöchstens werden Kegel, Kugel, Paraboloid oder Ellipsoid mit ihren stereometrischen Größen bestimmt. Eine Birne ist aber kein Kegel, ein Apfel keine Kugel und ein Ei kein Ellipsoid, denn die Natur zeigt uns wesentlich komplexere und kompliziertere Formen auf. Der natürlichen Umwelt und Form gegenüber bleibt die elementare Stereometrie eine theoretische Lehre, denn sie beschreibt etwas, das es nur in Annäherung gibt. Die Beschreibung der Natur und ihrer Formen, man denke nur an Berge, Bäume und deren Früchte, steckt immer noch in den Kinderschuhen. Erste Schritte auf diesem neuen Forschungsgebiet wurden erst mit Benoit Mandelbrot und der Entdeckung der sogenannten "Apfelmännchen" oder auch "Mandelbrotmengen" unternommen. Dieser neue Zweig der Mathematik, die fraktale Geometrie, spielt sich aber hauptsächlich in der Ebene der komplexen Zahlen ab, doch auch die Mathematik der reellen Funktionen ist zur Beschreibung von natürlichen Körpern in der Lage (vgl. [19]).

Die hier vorgestellten Methoden versuchen die praktische Realität abzubilden, reale biologische Körper sind aber nur mit einer

Vielzahl von Einflußgrößen zu erfassen, dementsprechend schwierig wird die rechnerische und analytische Behandlung. Dazu ist noch mehr mathematische Theorie als üblich notwendig – dies bedeutet aber dafür auch ein Mehr an Realität und mehr Wert für die Praxis.

Literaturverzeichnis

- [1] Biographien bedeutender Mathematiker. Eine Sammlung von Biographien. Wußing, Hans und Arnold, Wolfgang [Hrsg.]. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1975.
- [2] Blätter für Technikgeschichte. 41./42./43. Heft. Niederhüemer, Rolf [Hrsg.]. Wien: Springer, 1983.
- [3] Netz, Heinrich: Formeln der Mathematik. völlig neu bearbeitet von J. Rast. München; Wien: Carl Hanser, 1986⁶.
- [4] Metzger, R.: Vom Bruch zum Integral. Band II. Höhere Mathematik. Kurze allgemeinverständliche Mathematik für Fortgeschrittene. Trechtlingshausen: R. Metzger & Söhne, 1988².
- [5] Bartsch, Hans-Jochen: Mathematische Formeln. Leipzig: VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1988¹⁵.
- [6] Kreul, Marianne: Mathematik in Beispielen. Bd. 2: Funktionen und Kurven. Thun; Frankfurt/Main: Harri Deutsch, 1989.
- [7] Netz, Heinrich: Formeln der Mathematik. Braunschweig: Georg Westermann, 1965.
- [8] Spoerel, Johannes: Mathematik von der Schule bis zur Hochschule. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1966³.
- [9] Bosch, Karl: Mathematik Taschenbuch. München; Wien: Oldenbourg, 1989.
- [10] Mathematik Ratgeber: für Lehrer, Schüler, Eltern und zum Selbststudium. Gekürzte Sonderausgabe d. kleinen Enzyklopädie Mathematik. Gottwald, S. [Hrsg.]. Frankfurt/Main: Harri Deutsch, 1988².
- [11] Vieweg Programmbibliothek Mikrocomputer Bd. 10. PC-1500 Sammlung III. Schummy, Harald [Hrsg.] Braunschweig; Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 1984.
- [12] Glaeser, Georg: 3-D-Programmierung mit BASIC. Stuttgart: Teubner, 1986.
- [13] Bielig-Schulz, Gisela: 3D-Graphik in PASCAL. Stuttgart: Teubner, 1987.
- [14] Das neue Duden-Lexikon: in 10 Bänden. Band 1: A-Bise. [Hrsg.] Meyers Lexikonredaktion. Mannheim; Wien; Zürich: Dudenverlag, 1989².
- [15] Tönnies, Christian: Praktische und angewandte Mathematik. Band 2: Differentialrechnung. Essen: Girardet, 1965.
- [16] Das neue Duden-Lexikon: in 10 Bänden. Band 3: Draifrid. [Hrsg.] Meyers Lexikonredaktion. Mannheim; Wien; Zürich: Dudenverlag, 1989².
- [17] Kühlein, Theo: Mentor-Repetitorien. Band 34. Differentialrechnung II. Berlin-Schöneberg: Mentor, 1966⁶.
- [18] Herrmann, Dietmar: Numerische Mathematik. 40 BASIC-Programme. Braunschweig; Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn, 1983.
- [19] Mandelbrot, Benoit B.: Die fraktale Geometrie der Natur. Basel; Boston: Birkhäuser, 1987.

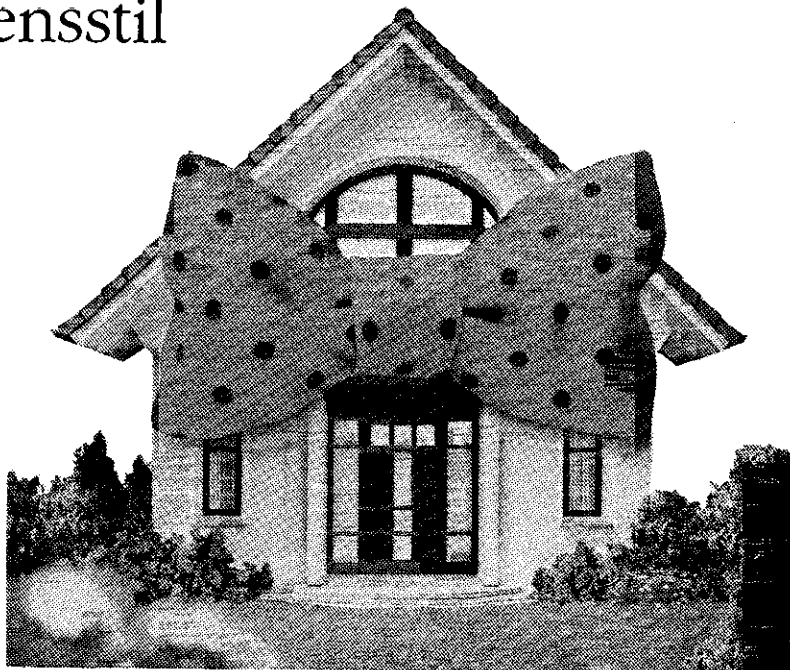
B H W D I S P O 2 0 0 0

Auf Ihren Lebensstil zugeschnitten.

Mit BHW DISPO 2000 bekommen Sie maßgeschneiderte Angebote, mit denen Sie unkompliziert zu Ihren eigenen vier Wänden kommen.

- ▲ Mit der günstigen BHW-Finanzierung
 - ▲ Mit Geld vom Staat und Arbeitgeber
 - ▲ Mit dem flexiblen BHW DISPO 2000
- Fragen Sie Ihren BHW-Berater. Er berät Sie individuell und umfassend.

BHW
Bank · Bausparkasse · Versicherung
Immer eine Idee mehr.



Die BHW-Gruppe: BHW Bausparkasse AG als Partner für den öffentlichen Dienst.

Und für alle: BHW Allgemeine Bausparkasse AG, BHW Bank AG, BHW Lebensversicherung AG, BHW Immobilien GmbH. BHW auch in Luxemburg und Brüssel.